# Problem Description

**Stepped Cantilever Beam Design Problem**

A stepped cantilever beam is supported at one end and a load is applied at the free end, as shown in the figure below. The beam must be able to support the given load, $P$, at a fixed distance $L$ from the support. Designers of the beam can vary the width (bi) and height (hi) of each section. We will assume that each section of the cantilever has the same length, l.

Một dầm công xôn bậc được đỡ ở một đầu và tải trọng được đặt ở đầu tự do, như thể hiện trong hình bên dưới. Dầm phải có khả năng chịu tải trọng nhất định P, ở một khoảng cách cố định từ giá đỡ. Người thiết kế dầm có thể thay đổi chiều rộng (bi) và chiều cao (hi) của mỗi phần. Chúng tôi sẽ giả định rằng mỗi phần của công xôn có cùng chiều dài l.

Diagram

Description automatically generated

Volume of the beam:

Thể tích của dầm

The volume of the beam, $V$, is the sum of the volume of the individual sections

Thể tích của dầm V được tinh bằng tổng thể tích của từng mặt cắt đơn lẻ

**Constraints on the Design : 1 - Bending Stress**

Ràng buộc của thiết kế: Bending Stress / Ứng suất uốn

Consider a single cantilever beam, with the center of coordinates at the center of its cross section at the free end of the beam. The bending stress at a point $(x, y, z)$ in the beam is given by the following equation

Xem xét một dầm công xon với tâm chinh là điểm chinh giữa của mặt cắt đầu tự do. Ứng suất uốn tại điểm (x,y,z) của dầm được tinh bởi công thức

where  is the bending moment at $x$, $x$ is the distance from the end load and $I$ is the area moment of inertia of the beam.

Trong đó M(x) là mô men uốn tại x, x là khoảng cách từ tải trọng P và I là diện tích momen quán tinh của dầm

Now, in the stepped cantilever beam shown in the figure, the maximum moment of each section of the beam is $PD_i$, where $D_i$ is the maximum distance from the end load, $P$, for each section of the beam. Therefore, the maximum stress for the $i$-th section of the beam, $\sigma_i$, is given by

Bây giờ đối với dầm công xon giật cấp, momen tối đa của mỗi mặt cắt là PDj. Trong đó Di là khoang cách tối đa từ P đối với mỗi mặt cắt trong dầm. Vậy nên, ứng suất tối đa của mặt cắt thứ i là sigmal i được tinh bởi công thức:

where the maximum stress occurs at the edge of the beam, $y = h_i/2$. The area moment of inertia of the $i$-th section of the beam is given by

tại đó ứng suất lớn nhất xuất hiện ở mép của dầm y=hi/2,. Mômen quán tính diện tích của tiết diện-thứ của dầm được cho bởi

Substituting this into the equation for $\sigma_i$ gives

Thay vào phương trinh tinh sigmali ta được

The bending stress in each part of the cantilever should not exceed the maximum allowable stress, $\sigma_{max}$. Consequently, we can finally state the five bending stress constraints (one for each step of the cantilever)

Ứng suất uốn trong từng phần của công xôn không được vượt quá ứng suất lớn nhất cho phép ,. Do đó, cuối cùng chúng ta có thể nêu năm giới hạn ứng suất uốn (một giới hạn cho mỗi bước của công xôn)

**Constraints on the Design : 2 - End deflection**

**Ràng buộc thứ 2 trong thiết kế: Độ võng cuối**

The end deflection of the cantilever can be calculated using Castigliano's second theorem, which states that

Độ võng cuối của công xôn có thể được tính toán bằng cách sử dụng định lý thứ hai của Castigliano, phát biểu rằng

where $\delta$ is the deflection of the beam, $U$ is the energy stored in the beam due to the applied force, $P$. The energy stored in a cantilever beam is given by

Trong đó $\delta$ là độ võng của dầm, U là năng lượng tích trữ trong dầm do tải trọng P. Năng lượng tích trữ trong dầm được tinh như sau:

where $M$ is the moment of the applied force at $x$.

Trong đó M là momen gây ra bởi tải trọng tại vị trí x

Trong đó M = Px for a cantilever beam, we can write the above equation as

Ta có thể viết phương trinh tinh U như sau:

where $I_n$ is the area moment of inertia of the $n$-th part of the cantilever. Evaluating the integral gives the following expression for $U$.

Trong đó In là momen quán tinh tiết diện n của dầm công xon. Tính toan ta được:

Applying Castigliano's theorem, the end deflection of the beam is given by

Áp dụng định lý Castigliano, độ võng cuối của dầm được tinh như sau:

Now, the end deflection of the cantilever, , should be less than the maximum allowable deflection, , which gives us the following constraint.

Giờ đọ độ võng tinh toan phải nhỏ hơn độ võng tối đa cho phép như sau:

**Constraints on the Design : 3 - Aspect ratio**

**Ràng buộc thứ 3: Tỉ lệ khung**

For each step of the cantilever, the aspect ratio must not exceed a maximum allowable aspect ratio,  amax. That is,

Qua mỗi bậc của dầm, tỉ lệ khung phải nhỏ hơn tỉ lệ khung cho phép.

hi/bi amax for i = 1, …, 5

### State the Optimization Problem

Let

We are now able to state the problem to find the optimal parameters for the stepped cantilever beam given the stated constraints.

Minimize:

Subject to:

The first step of the beam can only be machined to the nearest centimeter. That is, $x_1$ and $x_2$ must be integer. The remaining variables are continuous. The bounds on the variables are given below:-

*Design Parameters for This Problem*

For the problem we will solve in this example, the end load that the beam must support is P=5000 N

The beam lengths and maximum end deflection are:

* Total beam length,  L=500cm
* Individual section of beam,  l= 100cm
* Maximum beam end deflection,

The maximum allowed stress in each step of the beam,

Young's modulus of each step of the beam,  E= 2x107 N/cm2

# Figure



# Results

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ref** | **Algorithm** | **No Iteration** | **b1** | **h1** | **b2** | **h2** | **b3** | **h3** | **b4** | **h4** | **b5** | **h5** | **Best** |
| 51 | RNES 1 | 12000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.311 | 43.108 | 1.822 | 34.307 | 64269.59 |
| RNES 2 | 12000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.267 | 43.797 | 1.849 | 34.282 | 64322.43 |
| RNES 3 | 12000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.348 | 42.804 | 1.783 | 34.753 | 64299.11 |
| RNES 4 | 12000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.491 | 41.51 | 2.113 | 33.231 | 65416.9 |
| 52 | DOT | N.A. |  |  | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 |  |  |  |  | 65391.59 |
| SLP | N.A. |  |  | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 |  |  |  |  | 65451.5 |
| MLD-SLP | N.A. |  |  | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 |  |  |  |  | 65352.2 |
| 49 | C/RU | N.A. | 4 | 62 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.205 | 44.09 | 1.751 | 35.03 | 73555 |
| PD | N.A. | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.276 | 45.528 | 1.75 | 34.995 | 64537 |
| LAD | N.A. | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.262 | 45.233 | 1.75 | 34.995 | 64403 |
| CAD | N.A. | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.279 | 45.553 | 1.75 | 35.004 | 64403 |
| 50 | GA1 | 10000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.3 | 45.5 | 1.8 | 35 | 64558 |
| GA2 | 10000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.27 | 45.25 | 1.75 | 35 | 64447 |
| 22 | GA-APM | 35000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.289 | 45.626 | 1.793 | 34.593 | 64698.56 |
| 23 | AIS-GA | 35000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.235 | 44.395 | 2.004 | 32.879 | 65559.6 |
| AIS-GA-C | 35000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.311 | 43.186 | 2.225 | 31.25 | 66533.47 |
| [X](https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0045794911002185) | FA | 50000 | 3 | 60 | 3.1 | 55 | 2.6 | 50 | 2.205 | 44.091 | 1.75 | 34.995 | 63.893.52 |
|  | **HSSAPSO** | **200** | **2.631116** | **63.8134** | **2.446736** | **59.18795** | **2.513092** | **50.57701** | **1.923863** | **47.1981** | **1.707718** | **35.42337** | **60184.34** |